14　関数の極限

基本問題 ＆ 解法のポイント

23

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\left(2e^x-e^{-x}\right)}{e^{-x}\left(e^x+e^{-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

$$=2$$

(3)

解法 **1**：平方根と絶対値の学習になる

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-3x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2x+\sqrt{4x^2-3x}\right)\left(2x-\sqrt{4x^2-3x}\right)}{2x-\sqrt{4x^2-3x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-\left|4x^2-3x\right|}{2x-\sqrt{4x^2-3x}}$$

ここで，$x\to-\infty$ より，x が十分小さいとしてよいから，$4x^2-3x=x(4x-3)>0$

よって，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-3x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-\left(4x^2-3x\right)}{2x-\sqrt{4x^2-3x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{2x-\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{2x-|x|\sqrt{4-\frac{3}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{2x-(-x)\sqrt{4-\frac{3}{x}}}\qquad\left(\because x<0 \text{ より } \sqrt{x^2}=|x|=-x\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{2 + \sqrt{4 - \dfrac{3}{x}}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

補足

$x < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x^2}$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(2x + \sqrt{4x^2 - 3x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 - 3x)}{2x - \sqrt{4x^2 - 3x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{2x - \sqrt{4x^2 - 3x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{2 - \dfrac{\sqrt{4x^2 - 3x}}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{2 - \dfrac{\sqrt{4x^2 - 3x}}{-\sqrt{x^2}}} \quad \left(\because x < 0 \text{ より } x = -\sqrt{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{2 + \sqrt{4 - \dfrac{3}{x}}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

解法 2

$x = -t$ とおくと，$x \to -\infty$ のとき $t \to \infty$ だから，

$$\lim_{x \to -\infty}\left(2x + \sqrt{4x^2 - 3x}\right) = \lim_{t \to \infty} -2t + \sqrt{4t^2 + 3t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\left(-2t + \sqrt{4t^2 + 3t}\right)\left(2t + \sqrt{4t^2 + 3t}\right)}{2t + \sqrt{4t^2 + 3t}}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{3t}{2t - \sqrt{4t^2 + 3t}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{2 + \sqrt{4 + \dfrac{3}{t}}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2 x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1^2$$
$$=\frac{1}{2}$$

(5)

$x>0$ において，$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq\dfrac{1}{x}\to 0\ (x\to\infty)$ だから，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

(6)

$x=3t$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to\infty$ だから，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^3$$
$$=e^3$$

24

(1)

解法 **1**：和積の法則を利用

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\sin(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\frac{x-a}{\sin(x-a)}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right\}$$
$$=1\cdot 1\cdot\cos a$$
$$=\cos a$$

解法 **2**：微分係数の定義を利用

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{x-a}{\sin(x-a)}\right\}$$

ここで，$f(x)=\sin x$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=f'(a)$

$f'(x)=\cos x$ より，$f'(a)=\cos a$

よって，

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x-a)} = \cos a \cdot 1$$
$$= \cos a$$

(2)

解法 **1**：公式を利用

$x-1=t$ とおくと，$x \to 1$ のとき $t \to 0$ だから，

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{1-e^{2x-2}} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{1-e^{2t}}$$
$$= -\frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{2t}{e^{2t}-1}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

解法 **2**：微分係数の定義を利用

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{1-e^{2x-2}} = -\lim_{x \to 1} \frac{1}{\dfrac{e^{2(x-1)}-1}{x-1}}$$

ここで，$f(x)=e^{2(x-1)}$ とおくと，$f'(x)=2e^{2(x-1)}$ より，$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{e^{2(x-1)}-1}{x-1} = f'(1) = 2$

よって，$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{1-e^{2x-2}} = -\frac{1}{2}$

補足

解法 1 で利用した公式 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ も微分係数の定義から導かれる。

$f(x)=e^x$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = f'(0) = e^0 = 1$

A

82

(1)

$t=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to+0$ だから，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)&=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t^2}(1-\cos t)\\&=\lim_{t\to+0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t^2(1+\cos t)}\\&=\lim_{t\to+0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\frac{1}{1+\cos t}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\sin\dfrac{x}{\pi}\right)}{\sin\dfrac{x}{\pi}}\cdot\frac{\sin\dfrac{x}{\pi}}{\dfrac{x}{\pi}}\cdot\frac{1}{\pi}&=\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\sin\dfrac{x}{\pi}\right)}{\sin\dfrac{x}{\pi}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\dfrac{x}{\pi}}{\dfrac{x}{\pi}}\\&=\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{\sin\frac{x}{\pi}\to0}\frac{\sin\left(\sin\dfrac{x}{\pi}\right)}{\dfrac{x}{\pi}}\cdot\lim_{\frac{x}{\pi}\to0}\frac{\sin\dfrac{x}{\pi}}{\dfrac{x}{\pi}}\\&=\frac{1}{\pi}\cdot1\cdot1\\&=\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)&=\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{\sin\left(\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)}{\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)}{\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\\&=\log e\cdot\lim_{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\to0}\frac{\sin\left(\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)}{\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\\&=1\end{aligned}$$

83

(1)

$\lim_{x\to 0} x^2=0$ だから，与式が有限の値となるための必要条件は

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)=0$$

すなわち，$\lim_{x\to 0}\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)=4-a$ より，$a=4$

このとき，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4+bx)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4+bx)}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{9-8x+7\cos 2x-(4+bx)^2}{x^2\left(\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4+bx\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-b^2x^2-8(b+1)x-7(1-\cos 2x)}{x^2\left(\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4+bx\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-b^2-8\cdot\dfrac{b+1}{x}-14\cdot\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4+bx}\end{aligned}$$

ここで，$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4+bx\right)=8$，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1$ だから，

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4+bx)}{x^2}$ が有限の値となるためには，

$\lim_{x\to 0}\dfrac{b+1}{x}$ が有限の値となることが，すなわち $b=-1$ であることが必要である。

このとき，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{-b^2-8\cdot\dfrac{b+1}{x}-14\cdot\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4+bx}&=\lim_{x\to 0}\frac{-1-14\cdot\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4-x}\\&=-\frac{15}{8}\end{aligned}$$

以上より，

$a=4,\ b=-1$ のとき，極限値 $-\dfrac{15}{8}$ をとる。

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\tan 5x-\sin 5x}{(ax)^b}&=\frac{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}-\sin 5x}{(ax)^b}\\
&=\frac{\sin 5x(1-\cos 5x)}{\cos 5x\cdot(ax)^b}\\
&=\frac{\sin 5x}{(ax)^b}\cdot\frac{(1-\cos 5x)(1+\cos 5x)}{\cos 5x(1+\cos 5x)}\\
&=\frac{\sin 5x}{(ax)^b}\cdot\frac{1-\cos^2 5x}{\cos 5x(1+\cos 5x)}\\
&=\frac{\sin^3 5x}{(ax)^b}\cdot\frac{1}{\cos 5x}\cdot\frac{1}{1+\cos 5x}\\
&=\frac{5^3}{a^b x^{b-3}}\cdot\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^3\cdot\frac{1}{\cos 5x}\cdot\frac{1}{1+\cos 5x}
\end{aligned}
$$

これと，$\dfrac{\tan 5x-\sin 5x}{(ax)^b}=4$，$\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\right)^3=1$，$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 5x}=1$，$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos 5x}=\dfrac{1}{2}$ より，

$\lim_{x\to 0}\dfrac{5^3}{a^b x^{b-3}}=8$　すなわち $\dfrac{5^3}{a^b}\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{b-3}=8$ となればよい。

$b<3$ とすると，$\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{b-3}=0$ となり，不適

$b=3$ とすると，$\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{b-3}=1$ より，$\dfrac{5^3}{a^3}=8$　$\therefore a=\dfrac{5}{2}$

$b>3$ とすると，$\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{b-3}=\infty$ となり，不適

よって，$a=\dfrac{5}{2}, b=3$

84

(1)

$\mathrm{P}(0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(t,\ \cos 2t)$ より，$(0,\ a)$線分 PQ の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1+\cos 2t}{2}\right)$

また，条件より $\mathrm{PQ}\perp\mathrm{MR}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}=0$
したがって，$\mathrm{R}(0,\ a)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\begin{pmatrix} t \\ \cos 2t-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\dfrac{t}{2} \\ a-\dfrac{1+\cos 2t}{2} \end{pmatrix}$$
$$=-\frac{t^2}{2}-a(1-\cos 2t)+\frac{1-\cos^2 2t}{2}$$
$$=-\frac{t^2}{2}-a(1-\cos 2t)+\frac{(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)}{2}$$

より，$-\dfrac{t^2}{2}-a(1-\cos 2t)+\dfrac{(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)}{2}=0$

すなわち $a(1-\cos 2t)=-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)}{2}$

ここで，P と Q は異なる点だから，$1\neq\cos 2t$

よって，$a=-\dfrac{t^2}{2(1-\cos 2t)}+\dfrac{1+\cos 2t}{2}=-\dfrac{t^2}{4\sin^2 t}+\cos^2 t$

(2)

点 P における曲線 K の接線の方程式は $y=1$ だから, 点 P における円 C の接線も $y=1$ である。これと $y=1$ が x 軸に平行であることと円の中心から接点に引いた線分と接線のなす角は 90° であることから, 円 C の中心は y 軸上にあり, さらに, 円 C が点 P,Q を通ることから, その点は R である。

よって，円 C の半径 $r=\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|=1-\left(-\frac{t^2}{4\sin^2 t}+\cos^2 t\right)=1-\cos^2 t+\frac{1}{4}\cdot\frac{t^2}{\sin^2 t}=\sin^2 t+\frac{1}{4}\cdot\frac{t^2}{\sin^2 t}$$

ゆえに,

$$\lim_{t\to 0} r=\lim_{t\to 0}\left(\sin^2 t+\frac{1}{4}\cdot\frac{t^2}{\sin^2 t}\right)$$
$$=0+\frac{1}{4}\cdot 1$$
$$=\frac{1}{4}$$

B

85

(1)

$x \to \infty$ で考えるから，$x > 1$ としてよい。

$a < b$ のとき

解法 1

$x^b < x^a + x^b < 2x^b$ より，$\log_x x^b < \log_x \left(x^a + x^b\right) < \log_x 2x^b$

$$\lim_{x\to\infty} \log_x x^b = b$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \log_x 2x^b &= \lim_{x\to\infty}\left(\log_x 2 + b\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\log 2}{\log x} + b\\ &= 0 + b\\ &= b\end{aligned}$$

よって，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_x \left(x^a + x^b\right) = b$

解法 2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \log_x \left(x^a + x^b\right) &= \lim_{x\to\infty} \log_x x^b\left(\frac{1}{x^{b-a}} + 1\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left\{\log_x x^b + \log_x\left(\frac{1}{x^{b-a}} + 1\right)\right\}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left\{b + \frac{\log\left(\frac{1}{x^{b-a}} + 1\right)}{\log x}\right\}\\ &= b + \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{x^{b-a}} + 1\right)}{\log x}\\ &= b + 0\\ &= b\end{aligned}$$

$a = b$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \log_x \left(x^a + x^b\right) &= \lim_{x\to\infty} \log_x 2x^a\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\log_x 2 + \log_x x^a\right)\\ &= 0 + a\\ &= a\end{aligned}$$

$a>b$ のとき

$a<b$ のときと同様にして，$\lim_{x\to\infty}\log_x\left(x^a+x^b\right)=a$

(2)

$a<\dfrac{b}{2}$ のとき

$x^a<x^{\frac{b}{2}}$ より，$x^{\frac{b}{2}}<2x^a+x^{\frac{b}{2}}<3x^{\frac{b}{2}}$

$\lim_{x\to\infty}\log_x x^{\frac{b}{2}}=\dfrac{b}{2}$，$\lim_{x\to\infty}\log_x 3x^{\frac{b}{2}}=\dfrac{b}{2}$ およびはさみうちの原理により，

$$\lim_{x\to\infty}\log_x\left(2x^a+x^{\frac{b}{2}}\right)=\frac{b}{2}\qquad \therefore L=\frac{b}{2}$$

あるいは

$$\lim_{x\to\infty}\log_x\left(2x^a+x^{\frac{b}{2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\log_x x^{\frac{b}{2}}\left(\frac{2}{x^{\frac{b}{2}-a}}+1\right)=\frac{b}{2}$$

$a=\dfrac{b}{2}$ のとき

$$\lim_{x\to\infty}\log_x\left(2x^a+x^{\frac{b}{2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\log_x 3x^a=a\qquad \therefore L=a$$

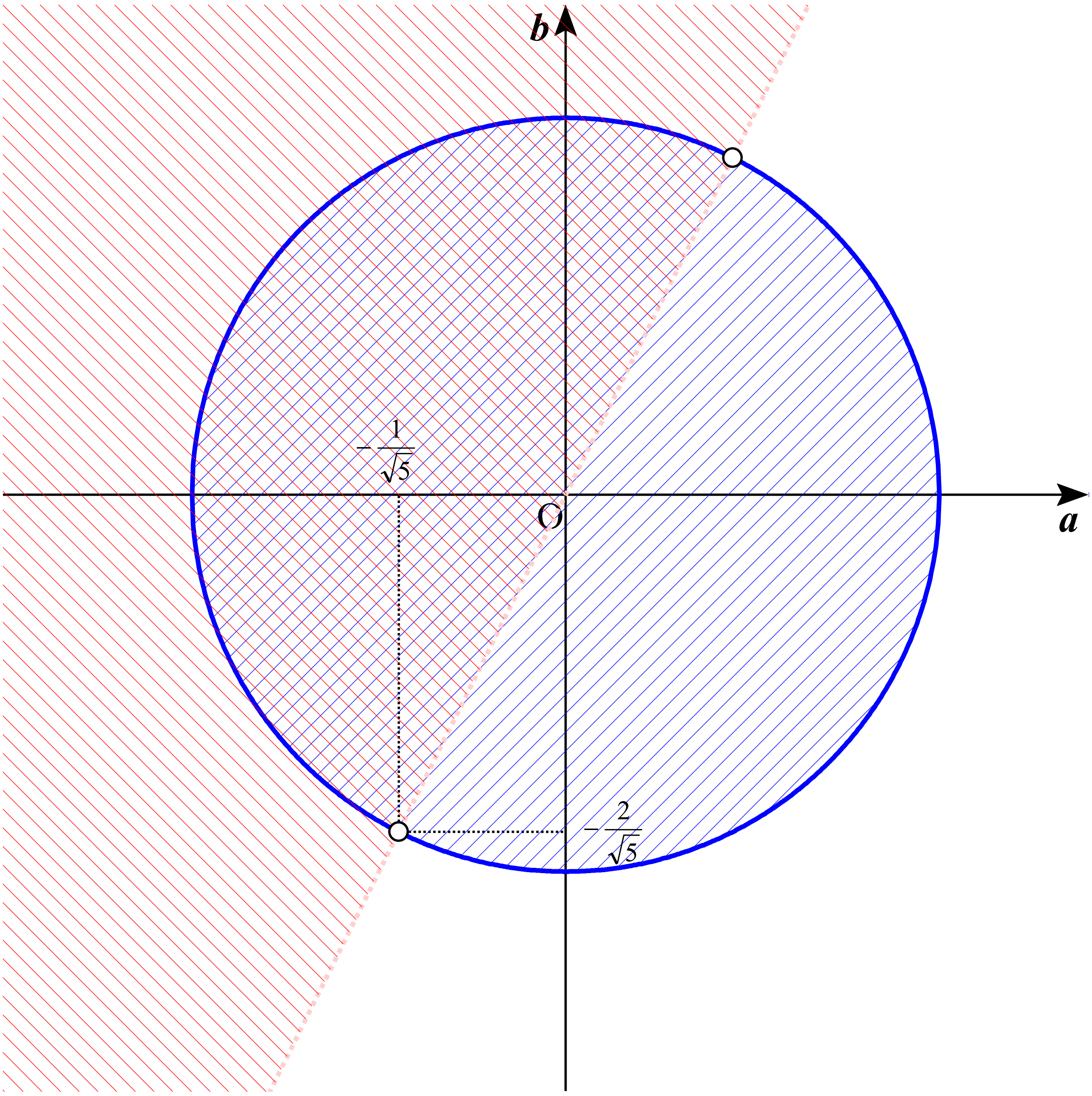
$a>\dfrac{b}{2}$ のとき

$a<\dfrac{b}{2}$ のときと同様にして，$L=a$

これと $a^2+b^2\leq 1$ より，それぞれの領域図は次図のようになる。

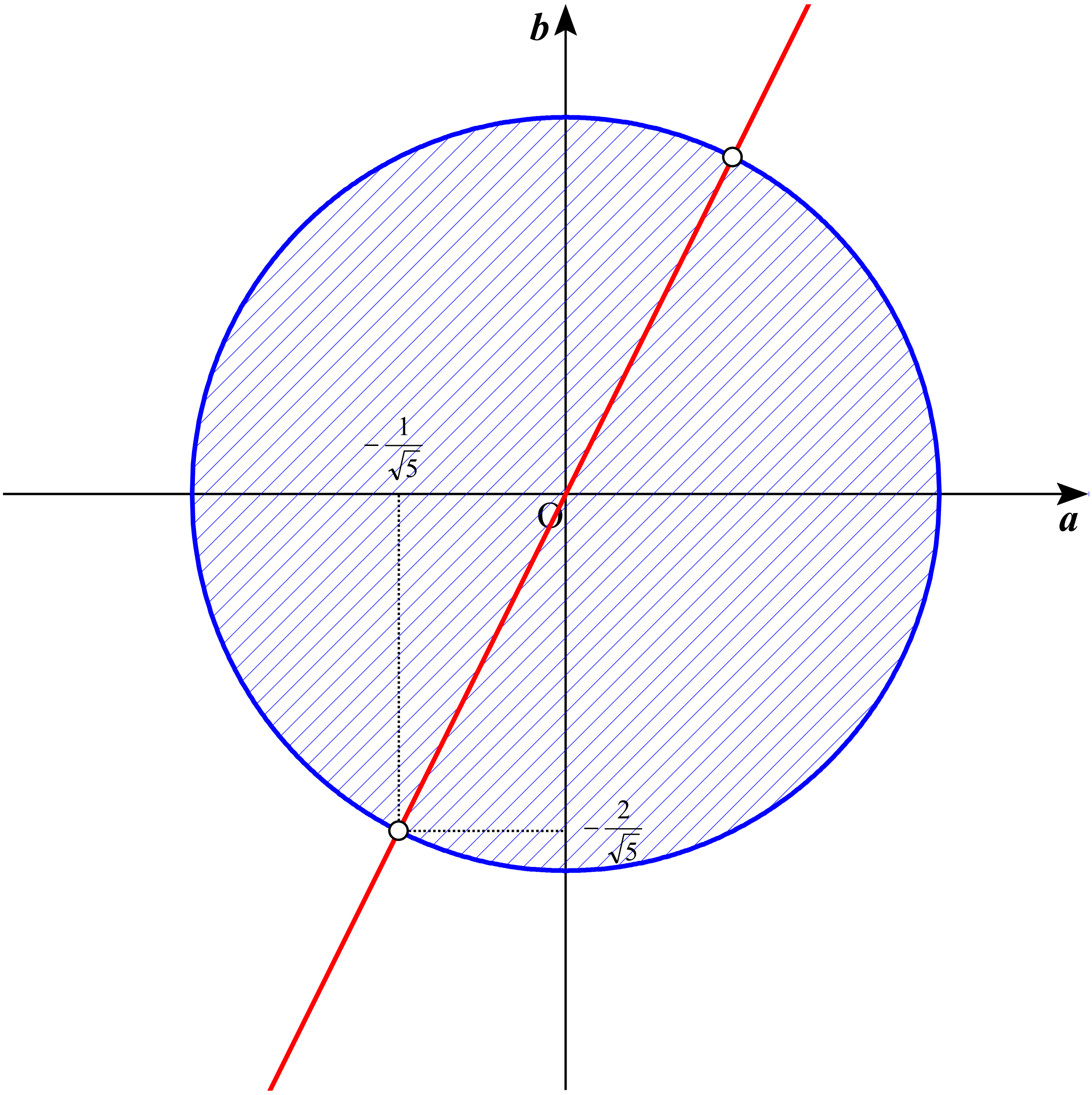
$a^2+b^2 \leqq 1$，$a<\dfrac{b}{2}$ のとき

$L=\dfrac{b}{2}>-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となり，L の最小値が存在しない。



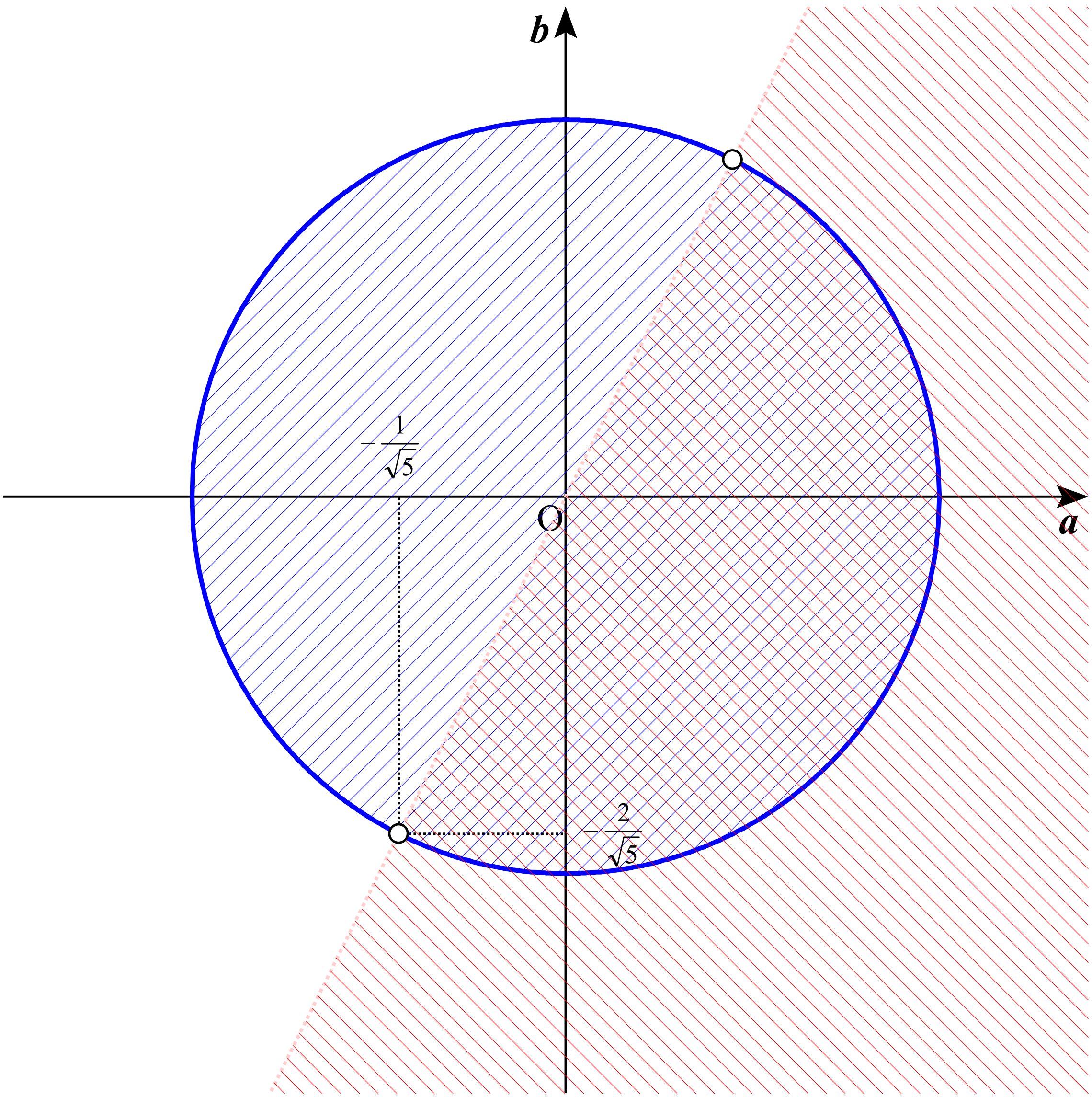
$a^2+b^2 \leqq 1$，$a=\dfrac{b}{2}$ のとき

$L=a \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ より，$(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき，L は最小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ をとる。



$a^2+b^2\leqq 1$，$a>\dfrac{b}{2}$ のとき

$L=a>-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ より，L の最小値が存在しない。



以上より，

$(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ のとき，L は最小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ をとる。

86

条件より，$\Delta\mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k \backsim \Delta\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}$，$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=1+\dfrac{1}{n}$

よって，

$$a_k=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_{k-1}$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}a_1$$

したがって，

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=a_1\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}$$
$$=a_1\cdot\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1}$$
$$=na_1\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right\}$$

ここで，余弦定理より，

$$a_1=\sqrt{\mathrm{OP}_0{}^2+\mathrm{OP}_1{}^2-2\mathrm{OP}_0\cdot\mathrm{OP}_1\cos\frac{\pi}{n}}$$
$$=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{n^2}+2\left(1+\frac{1}{n}\right)-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{n^2}+2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{n^2}+2\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\left(1+\cos\dfrac{\pi}{n}\right)}{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{n^2}+2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\sin^2\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}}$$

よって，

$$s_n = na_1\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= n\sqrt{\frac{1}{n^2} + 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \sin^2\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \sqrt{1 + 2n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \sin^2\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \sqrt{1 + 2\pi^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \sqrt{1 + 2\pi^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1 + 2\pi^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \sqrt{1+2\pi^2\cdot 1\cdot 1^2\cdot\frac{1}{1+1}}(e-1)$$

$$= (e-1)\sqrt{1+\pi^2}$$

補足

$\frac{\pi}{n} = t$ とおくと，$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t} = 1$

$\frac{1}{n} = u$ とおくと，$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{u\to+0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$